Egzamin z **analizy matematycznej II.2** (termin I)

15 czerwca 2021, 9:00 – 13:00

Rozwiązanie każdego zadania **prosimy** umieścić w **jednym** pliku, najlepiej **pdf** lub każde zadanie na **oddzielnej** kartce.

Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy, ...
Można korzystać z książek, notatek, itp...
Zadania należy rozwiązywać **samodzielnie**. **Nie wolno** korzystać z pomocy innych osób.

Zadanie 1 (10 pkt.). Niech γ będzie krzywą zorientowaną zadaną prametryzacją (zgodną z orientacją) $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t) = \Big(2 + 16t^2(t-1)^2, 4t(1-t), (1-t)\Big(1 + 16t^2(t-1)(2t-1)\Big)\Big)$$

oraz niech

$$\omega = \Big(2xz^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} + 2xz\Big)\,\mathrm{d}x + \Big(2yz^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} + 2yz\Big)\,\mathrm{d}y + \Big(2z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} + x^2 + y^2\Big)\,\mathrm{d}z.$$

(a) Sprawdź czy ω jest dokładna i czy jest zamknięta.

(b) Oblicz $\displaystyle\int_\gamma \omega$.

Zadanie 2 (10 pkt.). Oblicz całkę z formy $\eta = x^3\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ po półsferze $S_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, z \geqslant 0\}$ zorientowanej tak, że wektor $[0,0,1]$ jest wektorem normalnym zewnętrznym w punkcie $(0,0,1)$.

Zadanie 3 (10 pkt.). Niech

$$M = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \mathrm{e}^{-x-y}, 0 < x < 1, 0 < y < 1\Big\}.$$

Dla każdego $p \in M$ niech $\vec{v}(p)$ oznacza rzut wektora $[1,1,0]$ zaczepionego w punkcie p na prostą wyznaczoną przez wektor normalny do M w punkcie p. Oblicz

$$\int_M ||\vec{v}(p)||\,\mathrm{d}\sigma_2(p),$$

gdzie $||\vec{v}||$ oznacza normę euklidesową wektora $\vec{v}$.

Zadanie 4 (10 pkt.). Załóżmy, że $U \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem ograniczonym i spójnym z brzegiem klasy C^1 oraz funkcja f jest klasy C^2 na pewnym otoczeniu zbioru $\overline{U}$ i spełnia równanie

$$\operatorname{div}(A\nabla f) = 0 \quad \text{w } U, \tag{$\star$}$$

gdzie A jest symetryczną dodatnio określoną macierzą $n \times n$ o stałych współczynnikach. Wykaż, że funkcja f jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje wartości na brzegu U, tzn. jeżeli funkcje f, g spełniają równanie $(\star)$ oraz $f \equiv g$ na brzegu U to $f \equiv g$ w U.
